UM SEMINÁRIO SOBRE POLINÓMIOS EXPONENCIAIS

AYHAN GÜNAYDIN

Consideramos as soluções genéricas da equação $f(z) = 0$ em $\mathbb{C}$, onde $f(z) = p(z, \exp(z))$ e $p(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$ é um poliómio irredutível e ambas variáveis aparecem em p. Queremos provar que existem $z_1, z_2, \ldots$ em $\mathbb{C}$ tais que são algebicamente independente e $p(z_i, \exp(z_i)) = 0$ para cada i se a Conjectura de Schanuel for correta. Em [3], é provado que tal f tem que ter um número infinito de zeros. Assim é suficiente provar que para cada subcorpo algebricamente fechado K de $\mathbb{C}$ de grau de transcendência finito, há um número finito de $z \in K$ tais que $p(z, \exp(z)) = 0$. Então seja K um subcorpo de $\mathbb{C}$ de grau de transcendência d e colocamos $\Gamma := \exp(K)$. Podemos supor que os coeficientes de p e π estão em K.

Lembrando a Conjectura de Schanuel:

Conjectura. Dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ linearmente independentes, o grau de transcendência de $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \exp(\alpha_1), \ldots, \exp(\alpha_n))$ sobre $\mathbb{Q}$ é pelo menos n.

1. As Equações linear nos subgrupos multiplicativos

Nesta secção vamos reduzir ao caso de um grupo de grau finito. Começamos com alguns notações e definições.

Definições 1.1. Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e H um subgrupo. Para $n > 0$, notamos por $G^{[n]}$ o subgrupo $\{g^n : g \in G\}$ de G. Dizemos que H é *puro* se $H \cap G^{[n]} = H^{[n]}$ para todo $n > 0$ e dizemos que H é *radical* se H é puro e $\operatorname{tor}(H) = \operatorname{tor}(H)$.

Para $A \subseteq G$, notamos por $[A]_G$ e $\langle A \rangle_G$ o subgrupo gerado por A e o subgrupo puro gerado por A, repectivamente.

O seguinte é uma consequência facil da Conjectura de Schanuel.

Lema 1.2. *O grau de $K^\times \cap \Gamma$ é pelo menos d.*

Demonstração. Fácil...

No restante desta secção, consideramos as soluções (em Γ) das equações linear

$$(\star) \qquad \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 1,$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Dizemos que uma solução $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \Gamma^n$ de $(\star)$ é *nãodegenerada* se $\sum_{i \in I} \lambda_i \gamma_i \neq 0$ para todo o subconjuto não vazio I de $\{1, \ldots, n\}$.

Usamos o seguinte resultado de [1] para reduzir ao caso de 'grupos multiplicativos de grau finito'.

Lema 1.3. *Sejam $E \subseteq F$ corpos e sejam $H \leq G$ subgrupos de $F^\times$. Suponhemos H é subgrupo radical de G. Então os condições seguintes são equivalente*

(1) *para todos os $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in E$, as soluções nãodegeneradas em G da equação $(\star)$ estão em H.*

(2) *Os elementos $g_1, \ldots, g_n$ de G são algebricamente independentes sobre $E(H)$ se eles são multiplicativament independentes sobre H.*

Isso permite-nos provar o seguinte.

Proposição 1.4. *Suponhemos a Conjectura de Schanuel é verdadeira. Então existe um subgrupo Γ^* de grau finito de Γ tal que $K^\times \cap \Gamma \subseteq \Gamma^*$ e para todos os $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in E$, as soluções nãodegeneradas em Γ da equação ($\star$) estão em Γ^*.*

Demonstração. Difícil...

De acordo com este lema, temos $a_1, \ldots, a_s \in K$, que são linearmente independentes sobre $\pi\sqrt{-1}$ e $\Gamma^* = \langle \exp(a_1), \ldots, \exp(a_s) \rangle$. Então as soluções nãodegeneradas de ($\star$) são da forma

$$(\zeta_1 \exp(\frac{\vec{m}_1 \cdot \vec{a}}{n}), \ldots, \zeta_k \exp(\frac{\vec{m}_k \cdot \vec{a}}{n}))$$

para alguns $n > 0$, $\vec{m}_1, \ldots, \vec{m}_k \in \mathbb{Z}^s$ e $\zeta_1, \ldots, \zeta_k \in \mathbb{U}$ (Aqui $\mathbb{U}$ denota o grupo de raízes da unidade).

Em seguida, queremos mostrar que n pode ser considerado como 1. Usamos a seguinte lema de [2].

Lema 1.5. *Sejam $E \subseteq F$ corpos tais que todas as raízes da unidade de F estão em E. Supondo que G um subgrupo puro de $E^\times$, então para todos os $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in E$, as soluções nãodegeneradas de ($\star$) em $\langle G \rangle_{F^\times}$ estão em G.*

Fixemos um subcorpo L de K finitamente gerado sobre $\mathbb{Q}(\mathbb{U})$ e que contenha $\exp(a_1), \ldots, \exp(a_s)$.

Lema 1.6. *Existem $c_1, \ldots, c_{t'} \in K$ tais que para todos os $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$, as soluções nãodegeneradas de ($\star$) em Γ^* estão em $\mathbb{U} \cdot [\exp(c_1), \ldots, \exp(c_{t'})]$.*

Demonstração. No Lema 1.5, tomar $E = L$, $F = \mathbb{C}$ e $G = \langle \exp(a_1), \ldots, \exp(a_s) \rangle_{L^\times}$, e usar a Proposição 2.2 (ii) de [4]...

Agradecimento: Gostaria de agradecer a Pedro Freitas para a ajuda com o português.

Referências

[1] Lou van den Dries and Ayhan Günaydın. The fields of real and complex numbers with a small multiplicative group. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 93(1):43–81, 2006.

[2] Lou van den Dries and Ayhan Günaydın. Mann pairs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362(5):2393–2414, 2010.

[3] David Marker. A remark on Zilber's pseudoexponentiation. *J. Symbolic Logic*, 71(3):791–798, 2006.

[4] Boris Zilber and Martin Bays. Covers of multiplicative groups of algebraically closed fields of arbitrary characteristic. Available at the webpage `www.maths.ox.ac.uk/~zilber`, 2007.