

Kombinatorik ve Makine Öğrenmesi

Ayhan Günaydın

Boğaziçi Üniversitesi

`ayhan.gunaydin@boun.edu.tr`

17 Nisan 2018

Bu konuşmanın konusu ne değil?

- Programlama
- Soyut bilgisayar bilimleri
- Kriptografi
- Robot kolu (Hiç değil!)

Peki ne hakkında?

- Kombinatorik - Sayma
- Geometri
- Makine Öğrenmesi - Data Analizi
- Biraz da facebook, amazon, vs.

Kombinatorik - VC Boyutu

X bir küme, \mathcal{C} ise X 'in altkümelerinden oluşan bir koleksiyon. Verilen bir $A \subseteq X$ için $A \cap \mathcal{C} := \{A \cap S : S \in \mathcal{C}\}$ olarak tanımlansın. Bunu *\mathcal{C} 'nin A 'dan kestiği kümeler* olarak düşünelim.

Ana tanım: Eğer $A \cap \mathcal{C} = \mathcal{P}(A)$ oluyorsa \mathcal{C} , A 'yı *tuzla buz eder* diyelim. (İngilizcesi: *shatter*) (Yani A 'nın her altkümesini \mathcal{C} ile kesebiliyorsak.)

VC-Boyutu: Eğer X 'in d elemanlı bir altkümesi \mathcal{C} tarafından tuzla buz ediliyorsa ve hiç bir $d + 1$ elemanlı altkümesi tuzla buz edilmiyorsa, \mathcal{C} 'nin *VC-boyutu d 'dir* diyeceğiz.

Örnek 1

$X = \mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ (kapalı aralıklar).

$A_1 = \{0\}$. İki alt küme: \emptyset , $A_1 = \{0\}$.

Örnek 1

$X = \mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ (kapalı aralıklar).

$A_1 = \{0\}$. İki alt küme: \emptyset , $A_1 = \{0\}$.



Örnek 1

$X = \mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ (kapalı aralıklar).

$A_1 = \{0\}$. İki alt küme: \emptyset , $A_1 = \{0\}$.



Örnek 1

$X = \mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ (kapalı aralıklar).

$A_1 = \{0\}$. İki alt küme: \emptyset , $A_1 = \{0\}$.



Örnek 1

$X = \mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ (kapalı aralıklar).

$A_1 = \{0\}$. İki alt küme: \emptyset , $A_1 = \{0\}$.

$A_2 = \{0, 1\}$. Dört altküme: \emptyset , $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$.



Örnek 1

$X = \mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ (kapalı aralıklar).

$A_1 = \{0\}$. İki alt küme: \emptyset , $A_1 = \{0\}$.

$A_2 = \{0, 1\}$. Dört altküme: \emptyset , $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$.



Örnek 1

$X = \mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ (kapalı aralıklar).

$A_1 = \{0\}$. İki alt küme: \emptyset , $A_1 = \{0\}$.

$A_2 = \{0, 1\}$. Dört altküme: \emptyset , $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$.



Örnek 1

$X = \mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ (kapalı aralıklar).

$A_1 = \{0\}$. İki alt küme: \emptyset , $A_1 = \{0\}$.

$A_2 = \{0, 1\}$. Dört altküme: \emptyset , $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$.



Örnek 1

$X = \mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ (kapalı aralıklar).

$A_1 = \{0\}$. İki alt küme: \emptyset , $A_1 = \{0\}$.

$A_2 = \{0, 1\}$. Dört altküme: \emptyset , $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$.



Örnek 1

$X = \mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ (kapalı aralıklar).

$A_1 = \{0\}$. İki alt küme: \emptyset , $A_1 = \{0\}$.

$A_2 = \{0, 1\}$. Dört altküme: \emptyset , $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$.

$A_3 = \{0, 1, 2\}$. Sekiz altküme (listelemeyeceğiz). $\{0, 2\}$ altkümesini kapalı aralıklarla kesmek mümkün değil!



Örnek 1

$X = \mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ (kapalı aralıklar).

$A_1 = \{0\}$. İki alt küme: \emptyset , $A_1 = \{0\}$.

$A_2 = \{0, 1\}$. Dört altküme: \emptyset , $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$.

$A_3 = \{0, 1, 2\}$. Sekiz altküme (listelemeyeceğiz). $\{0, 2\}$ altkümesini kapalı aralıklarla kesmek mümkün değil!



Demek ki bu \mathcal{C} 'nin VC-boyutu 2.

VC Boyutu - Tekrar

X bir küme, \mathcal{C} ise X 'in altkümelerinden oluşan bir koleksiyon. Verilen bir $A \subseteq X$ için $A \cap \mathcal{C} := \{A \cap S : S \in \mathcal{C}\}$ olarak tanımlansın. Bunu *\mathcal{C} 'nin A 'dan kestiği kümeler* olarak düşünelim.

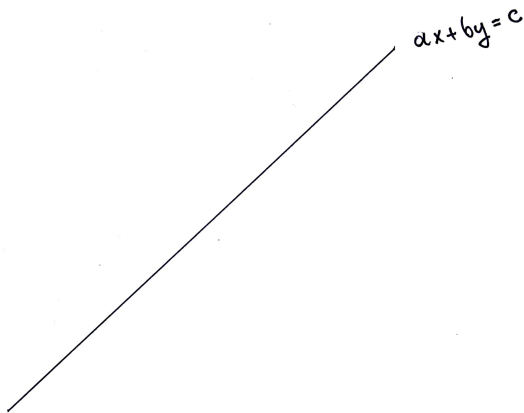
Ana tanım: Eğer $A \cap \mathcal{C} = \mathcal{P}(A)$ oluyorsa \mathcal{C} , A 'yı *tuzla buz eder* diyelim. (İngilizcesi: *shatter*) (Yani A 'nın her altkümesini \mathcal{C} ile kesebiliyorsak.)

VC-Boyutu: Eğer X 'in d elemanlı bir altkümesi \mathcal{C} tarafından tuzla buz ediliyorsa ve hiç bir $d + 1$ elemanlı altkümesi tuzla buz edilmiyorsa, \mathcal{C} 'nin *VC-boyutu d 'dir* diyeceğiz.

Örnek 2

$$X = \mathbb{R}^2, \mathcal{C} = \{H_{abc} : a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

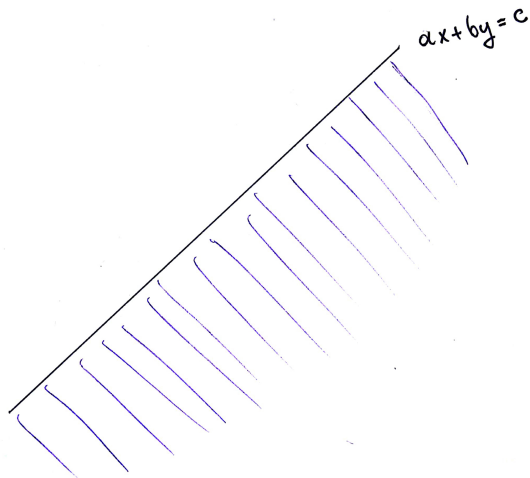
$$H_{abc} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by \leq c\}.$$



Örnek 2

$$X = \mathbb{R}^2, \mathcal{C} = \{H_{abc} : a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$H_{abc} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by \leq c\}.$$



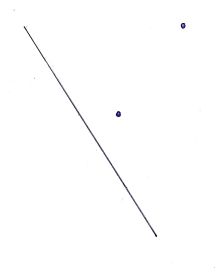
Örnek 2

$A_1 = \{p\}$ olsun. Yine, A_1 'i bu \mathcal{C} ile tuzla buz edebileceğimiz açık.

Örnek 2

$A_1 = \{p\}$ olsun. Yine, A_1 'i bu \mathcal{C} ile tuzla buz edebileceğimiz açık.

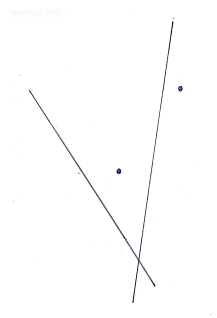
$A_2 = \{p, q\}$, iki elemanlı bir küme olsun. Bu kümeyi de yandaki gibi tuzla buz edebiliriz.



Örnek 2

$A_1 = \{p\}$ olsun. Yine, A_1 'i bu \mathcal{C} ile tuzla buz edebileceğimiz açık.

$A_2 = \{p, q\}$, iki elemanlı bir küme olsun. Bu kümeyi de yandaki gibi tuzla buz edebiliriz.

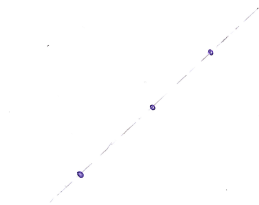


Örnek 2

$A_1 = \{p\}$ olsun. Yine, A_1 'i bu \mathcal{C} ile tuzla buz edebileceğimiz açık.

$A_2 = \{p, q\}$, iki elemanlı bir küme olsun. Bu kümeyi de yandaki gibi tuzla buz edebiliriz.

$A_3 = \{p, q, r\}$, üç elemanlı bir küme olsun. Bu durumda farklı kombinasyonlar olabilir. İlk olarak, bu üç nokta aynı doğru üzerinde olabilir



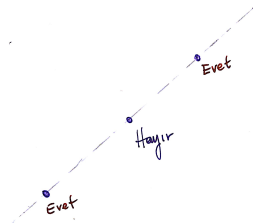
Bu üç noktalı kümeyi tuzla buz edemeyeceğimiz açık.

Örnek 2

$A_1 = \{p\}$ olsun. Yine, A_1 'i bu \mathcal{C} ile tuzla buz edebileceğimiz açık.

$A_2 = \{p, q\}$, iki elemanlı bir küme olsun. Bu kümeyi de yandaki gibi tuzla buz edebiliriz.

$A_3 = \{p, q, r\}$, üç elemanlı bir küme olsun. Bu durumda farklı kombinasyonlar olabilir. İlk olarak, bu üç nokta aynı doğru üzerinde olabilir



Bu üç noktalı kümeyi tuzla buz edemeyeceğimiz açık.

Örnek 2

$A_1 = \{p\}$ olsun. Yine, A_1 'i bu \mathcal{C} ile tuzla buz edebileceğimiz açık.

$A_2 = \{p, q\}$, iki elemanlı bir küme olsun. Bu kümeyi de yandaki gibi tuzla buz edebiliriz.

$A_3 = \{p, q, r\}$, üç elemanlı bir küme olsun. Bu durumda farklı kombinasyonlar olabilir. İlk olarak, bu üç nokta aynı doğru üzerinde olabilir. Bir de üç noktanın doğrusal olmaması durumu var.

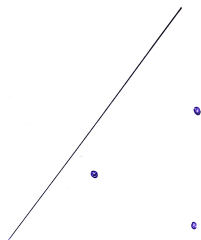


Örnek 2

$A_1 = \{p\}$ olsun. Yine, A_1 'i bu \mathcal{C} ile tuzla buz edebileceğimiz açık.

$A_2 = \{p, q\}$, iki elemanlı bir küme olsun. Bu kümeyi de yandaki gibi tuzla buz edebiliriz.

$A_3 = \{p, q, r\}$, üç elemanlı bir küme olsun. Bu durumda farklı kombinasyonlar olabilir. İlk olarak, bu üç nokta aynı doğru üzerinde olabilir. Bir de üç noktanın doğrusal olmaması durumu var.

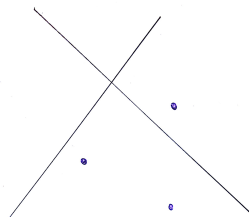


Örnek 2

$A_1 = \{p\}$ olsun. Yine, A_1 'i bu \mathcal{C} ile tuzla buz edebileceğimiz açık.

$A_2 = \{p, q\}$, iki elemanlı bir küme olsun. Bu kümeyi de yandaki gibi tuzla buz edebiliriz.

$A_3 = \{p, q, r\}$, üç elemanlı bir küme olsun. Bu durumda farklı kombinasyonlar olabilir. İlk olarak, bu üç nokta aynı doğru üzerinde olabilir. Bir de üç noktanın doğrusal olmaması durumu var.

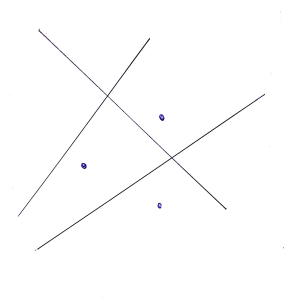


Örnek 2

$A_1 = \{p\}$ olsun. Yine, A_1 'i bu \mathcal{C} ile tuzla buz edebileceğimiz açık.

$A_2 = \{p, q\}$, iki elemanlı bir küme olsun. Bu kümeyi de yandaki gibi tuzla buz edebiliriz.

$A_3 = \{p, q, r\}$, üç elemanlı bir küme olsun. Bu durumda farklı kombinasyonlar olabilir. İlk olarak, bu üç nokta aynı doğru üzerinde olabilir. Bir de üç noktanın doğrusal olmaması durumu var.

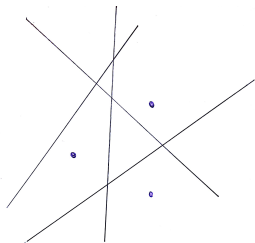


Örnek 2

$A_1 = \{p\}$ olsun. Yine, A_1 'i bu \mathcal{C} ile tuzla buz edebileceğimiz açık.

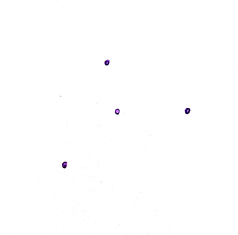
$A_2 = \{p, q\}$, iki elemanlı bir küme olsun. Bu kümeyi de yandaki gibi tuzla buz edebiliriz.

$A_3 = \{p, q, r\}$, üç elemanlı bir küme olsun. Bu durumda farklı kombinasyonlar olabilir. İlk olarak, bu üç nokta aynı doğru üzerinde olabilir. Bir de üç noktanın doğrusal olmaması durumu var.



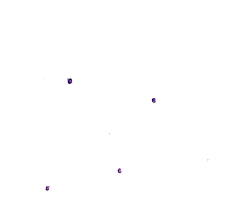
Örnek 2

Şimdi de dört elemanlı bi kümeye bakalım: A_4 . Yine bir kaç konfigürasyon var ama tuzla buz edebileceğimiz kümelerin olabildiğince *bağımsız* olması gerektiğini hissettik. Yani ilk üç noktayı doğrusal seçmemeliyiz. Dördüncü noktada bu ilk üçünün “içinde” olmamalı.



Örnek 2

Şimdi de dört elemanlı bir kümeye bakalım: A_4 . Yine bir kaç konfigürasyon var ama tuzla buz edebileceğimiz kümelerin olabildiğince *bağımsız* olması gerektiğini hissettik. Yani ilk üç noktayı doğrusal seçmemeliyiz. Dördüncü noktada bu ilk üçünün “içinde” olmamalı. Böyle olmayan bir küme alalım:



Örnek 2

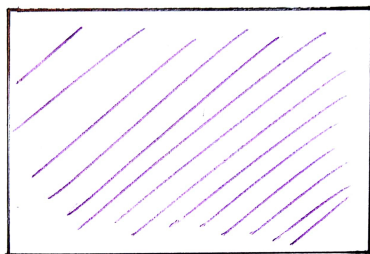
Şimdi de dört elemanlı bir kümeye bakalım: A_4 . Yine bir kaç konfigürasyon var ama tuzla buz edebileceğimiz kümelerin olabildiğince **bağımsız** olması gerektiğini hissettik. Yani ilk üç noktayı doğrusal seçmemeliyiz. Dördüncü noktada bu ilk üçünün “içinde” olmamalı. Böyle olmayan bir küme alalım. Ama yine de bu kümeyi de tuzla buz edemeyeceğimiz açık:



Demek ki yarıuzaylardan oluşan bu \mathcal{C} 'nin VC-boyutu da 3.

Örnek 3

Yine $X = \mathbb{R}^2$ olsun. Kavramlarımız da $\mathcal{C} = \{[a, b] \times [c, d] : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ olsun. Yani kenarları koordinat eksenlerine paralel olan dikdörtgenler:



Örnek 3

Yine tek elemanlı ve iki elemanlı kümeleri tuzla buz etmek kolay. Doğrusal olmayan üç elemandan oluşan bir küme de şu şekilde tuzla buz oluyor:



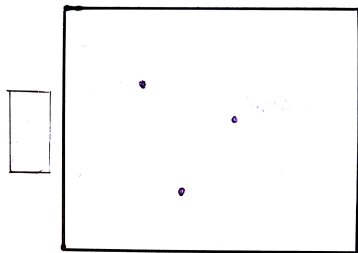
Örnek 3

Yine tek elemanlı ve iki elemanlı kümeleri tuzla buz etmek kolay.
Doğrusal olmayan üç elemandan oluşan bir küme de şu şekilde tuzla buz oluyor:



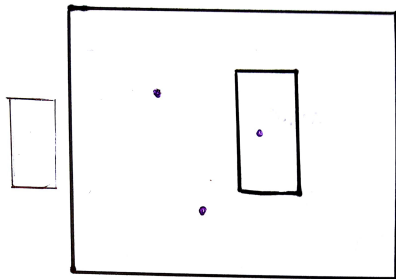
Örnek 3

Yine tek elemanlı ve iki elemanlı kümeleri tuzla buz etmek kolay.
Doğrusal olmayan üç elemandan oluşan bir küme de şu şekilde tuzla buz oluyor:



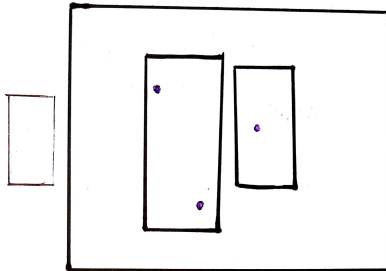
Örnek 3

Yine tek elemanlı ve iki elemanlı kümeleri tuzla buz etmek kolay.
Doğrusal olmayan üç elemandan oluşan bir küme de şu şekilde tuzla
buz oluyor:



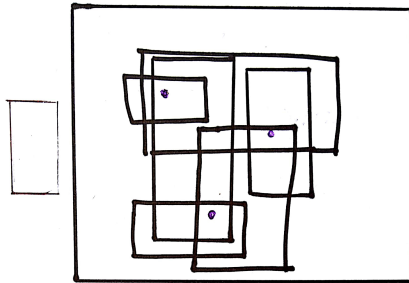
Örnek 3

Yine tek elemanlı ve iki elemanlı kümeleri tuzla buz etmek kolay.
Doğrusal olmayan üç elemandan oluşan bir küme de şu şekilde tuzla buz oluyor:



Örnek 3

Yine tek elemanlı ve iki elemanlı kümeleri tuzla buz etmek kolay.
Doğrusal olmayan üç elemandan oluşan bir küme de şu şekilde tuzla
buz oluyor:



Örnek 3

Peki ya dört elemanlı kümeler? Yine tuzla buz olabilmesi için en azından hiçbir noktanın diğerlerinin oluşturduğu poligonun içinde olmaması şartı var. Başka şartlar var mı? Mesela eğer bu noktalar bir dikdörtgenin köşeleriye, verilen üç noktayı kesmek mümkün olmayacaktır. Bunları sağlayan bir küme çizmeye çalışalım:



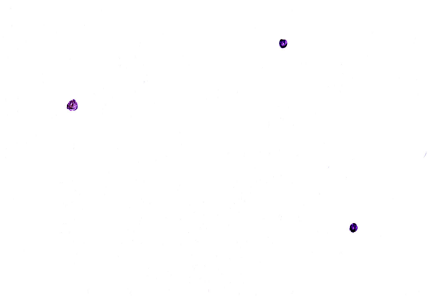
Örnek 3

Peki ya dört elemanlı kümeler? Yine tuzla buz olabilmesi için en azından hiçbir noktanın diğerlerinin oluşturduğu poligonun içinde olmaması şartı var. Başka şartlar var mı? Mesela eğer bu noktalar bir dikdörtgenin köşeleriye, verilen üç noktayı kesmek mümkün olmayacaktır. Bunları sağlayan bir küme çizmeye çalışalım:



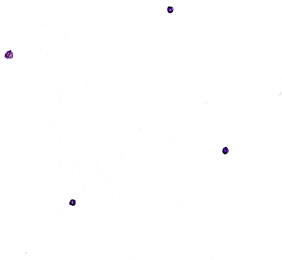
Örnek 3

Peki ya dört elemanlı kümeler? Yine tuzla buz olabilmesi için en azından hiçbir noktanın diğerlerinin oluşturduğu poligonun içinde olmaması şartı var. Başka şartlar var mı? Mesela eğer bu noktalar bir dikdörtgenin köşeleriye, verilen üç noktayı kesmek mümkün olmayacaktır. Bunları sağlayan bir küme çizmeye çalışalım:



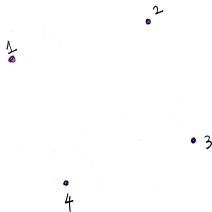
Örnek 3

Peki ya dört elemanlı kümeler? Yine tuzla buz olabilmesi için en azından hiçbir noktanın diğerlerinin oluşturduğu poligonun içinde olmaması şartı var. Başka şartlar var mı? Mesela eğer bu noktalar bir dikdörtgenin köşeleriye, verilen üç noktayı kesmek mümkün olmayacaktır. Bunları sağlayan bir küme çizmeye çalışalım:



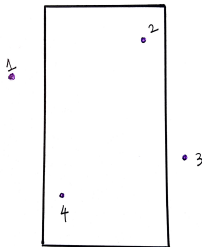
Örnek 3

Peki ya dört elemanlı kümeler? Yine tuzla buz olabilmesi için en azından hiçbir noktanın diğerlerinin oluşturduğu poligonun içinde olmaması şartı var. Başka şartlar var mı? Mesela eğer bu noktalar bir dikdörtgenin köşeleriye, verilen üç noktayı kesmek mümkün olmayacaktır. Bunları sağlayan bir küme çizmeye çalışalım:



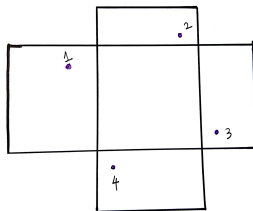
Örnek 3

Peki ya dört elemanlı kümeler? Yine tuzla buz olabilmesi için en azından hiçbir noktanın diğerlerinin oluşturduğu poligonun içinde olmaması şartı var. Başka şartlar var mı? Mesela eğer bu noktalar bir dikdörtgenin köşeleriye, verilen üç noktayı kesmek mümkün olmayacaktır. Bunları sağlayan bir küme çizmeye çalışalım:



Örnek 3

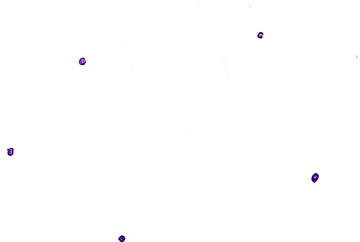
Peki ya dört elemanlı kümeler? Yine tuzla buz olabilmesi için en azından hiçbir noktanın diğerlerinin oluşturduğu poligonun içinde olmaması şartı var. Başka şartlar var mı? Mesela eğer bu noktalar bir dikdörtgenin köşeleriye, verilen üç noktayı kesmek mümkün olmayacaktır. Bunları sağlayan bir küme çizmeye çalışalım:



Yani tuzla buz edebildiğimiz dört elemanlı bir küme de bulmuş olduk. Demek ki C 'nin VC-boyutu en az dört.

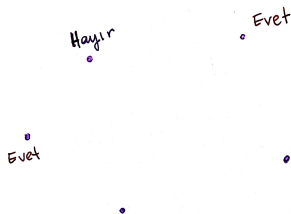
Örnek 3

Peki ya beş elemanlı kümeler? Biraz önceki dört eleman üzerine bir beşincisini, yine bağımsızlığı koruyarak koymaya çalışalım:



Örnek 3

Peki ya beş elemanlı kümeler? Biraz önceki dört eleman üzerine bir beşincisini, yine bağımsızlığı koruyarak koymaya çalışalım. Ama bu durumda da şu kümeyi seçemeyeceğiz:



Örnek 3

Bu sorunu sol üstteki noktayı yukarı iterek çözebiliriz ama diğer noktalar arasında benzer sorunlar çıkacaktır. Beş elemanlı hiç bir kümenin tuzla buz edilemeyeceğinin detaylarını size bırakıyorum.

Demek ki \mathcal{C} 'nin VC-boyutu 4'müş.

Bu örneklerden çıkarılacak dersler

Bu üç örneğe baktığımızda, VC-boyutunun verilen \mathcal{C} ailesinin *boyutu* ile aynı olduğunu gördük. Burada boyut dediğimiz şey nedir? Ailenin bir elemanını belirlemek için gerekli parametre sayısı. Genel olarak bu doğru mu? Evet!

Teorem

Bir *yarı-cebirsal* $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ kümesi verilsin. (Yani sonlu tane polinom eşitsizliğini sağlayan elemanların kümesi.) Verilen bir $b \in \mathbb{R}^n$ için

$$X_b = \{a \in \mathbb{R}^m : (a, b) \in X\}$$

kümesi olsun ve her b için X_b bağlı olsun ve içi boş olmasın. O zaman

$$\mathcal{C} = \{X_b : b \in \mathbb{R}^n\}$$

ailesinin VC-boyutu n 'dir.

Başka dersler?

Bu örneklerdeki \mathcal{C} aileleri oldukça geometrik. Genel fikir aileler bu şekilde geometrik biçimde veriliyorsa VC-boyutu sonsuz olamayacağı ve bu boyutu hesaplamanın çok zor olamayacağı.

Bir başka ders de n elemanlı bir kümenin bütün altkümelerini kesemesek de kaç tanesini kesebileceğimizi saymanın önemli olduğu. Bu kavramı matematiksel olarak anlamak için bir tanım yapalım.

Tuz-buz Fonksiyonu

Yukarıdaki gibi X kümesi ve \mathcal{C} ailesi verilsin.

$$\pi_{\mathcal{C}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

fonksiyonunu şu şekilde tanımlayacağız:

$$\pi_{\mathcal{C}}(n) := \max\{m : n \text{ elemanlı bir } A \subseteq X \text{ için } |A \cap \mathcal{C}| = m\}.$$

Bu tanımla, VC-boyutunu şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\text{VC}(\mathcal{C}) = \max\{n \in \mathbb{N} : \pi_{\mathcal{C}}(n) = 2^n\}.$$

Tuz-buz Fonksiyonu

Bu fonksiyonu ilginç yapan, VC-boyutundan büyük n 'ler için polinomsal olarak artıyor olması.

Teorem (Sauer-Shelah)

$VC(\mathcal{C}) = d$ olsun. O zaman

$$\pi_{\mathcal{C}}(n) \leq \sum_{i \leq d} \binom{n}{i} \leq \left(\frac{en}{d}\right)^d = O(n^d).$$

Tuz-buz Fonksiyonu

Bu teorem sayesinde VC-boyutundan daha rafine bir ölçü veren *VC yoğunluğu*'nu tanımlayabiliriz:

$$\text{vc}(\mathcal{C}) := \inf\{r \in \mathbb{R} : \pi_{\mathcal{C}}(n) = O(n^r)\}.$$

Mesela yukarıda bahsettiğimiz *yarı-cebirsal* olarak tanımlanan \mathcal{C} ailesi için VC-yoğunluğu 1. Yani büyük n 'ler için, \mathcal{C} verilen n elemanlı bir kümenin n 'nin sabit bir katı kadar alt kümesini kesebiliyor.

Dual Kavramlar

Yine X ve \mathcal{C} yukarıdaki gibi olsun. Verilen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$ için

$$S(A_1, \dots, A_n) := \left| \left\{ \bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{j \notin I} (X \setminus A_j) \neq \emptyset : I \subseteq \{1, \dots, n\} \right\} \right|$$

olarak tanımlayalım. Çok karmaşık gözükse de aslında sadece A_i 'lerin Venn diyagramında boş olmayan alanların sayısı.

Dual tuz-buz fonksiyonunu şu şekilde tanımlıyoruz:

$$\pi_{\mathcal{C}}^*(n) := \max \{ S(A_1, \dots, A_n) : A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C} \}.$$

Bu tanımları kullanarak dual VC-boyutunu da tanımlayabiliriz.

Dual Kavramlar

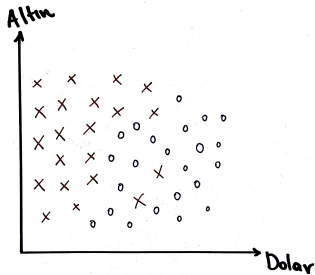
Şunu size bir alıştırmaya olarak bırakıyorum:

Verilen bir (X, \mathcal{C}) ikilisi için $\pi_{\mathcal{C}}^* = \pi_{\mathcal{C}^*}$ olacak şekilde bir (X^*, \mathcal{C}^*) ikilisi vardır.

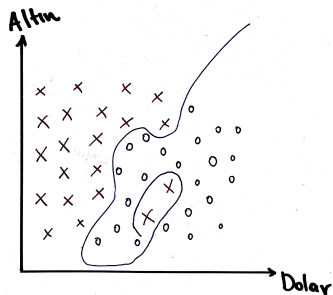
Böylece eğer işimizi kolaylaştıracaksa dual kavramlarla çalışmayı tercih edebiliriz.

Makine Öğrenmesi

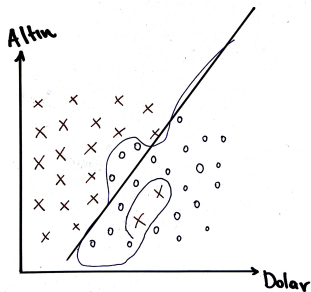
Bir örnek üzerinden gidelim. Aşağıda \mathbb{R}^2 düzlemini dolar ve altının birbirlerine göre durumu olarak düşünelim ve *elimizdeki* verilere göre çarpılar “*dolar al*” ve yuvarlaklar da “*altın al*” demek olsun.



Bunları birbirinden şu şekilde ayırabiliriz:



Ama bunun yerine şu şekilde ayırmak daha basit:



İkinci ayırma, bir kaç hata yaptı ama oransal olarak çok fazla da değil.

Makine Öğrenmesi

Bu örnekte *elimizdeki data* yardımı ile *gerçek hayat* hakkında bir tahmin yapmaya çalıştık. Şimdi bunu matematiksel olarak ifade etmeye çalışalım.

Bir X kümesi ve \mathcal{C} verilsin. (Genelde $X = \mathbb{R}^n$ olacak ve \mathcal{C} 'yi öğrenmek için yardımcı olan kavramlar olarak yorumlayacağız.)

Bu X kümesi üzerinde bir μ olasılık ölçüsü olsun ve bu ölçü kullanılarak \mathcal{C} 'nin bir C elemanının, N elemanlı bir A data kümesi verildiğinde yaptığı hatanın ölçüsünü $H_\mu(C, A)$ ile gösterelim.

Eğer verilen verilen $\epsilon, \delta > 0$ için \mathcal{C} 'nin her elemanı için aşağıdakini sağlayan bir $N_{\epsilon, \delta} > 0$ varsa, \mathcal{C} **PAC-öğrenilebilir**'dir denir:

$$\mu(\{A \subseteq X^{N_{\epsilon, \delta}} : H_\mu(C, A) > \epsilon\}) < \delta.$$

Teorem (Vapnik-Chervonenkis)

Eğer $VC(\mathcal{C}) = d$ ise \mathcal{C} PAC-öğrenilebilirdir ve verilen $\epsilon, \delta > 0$ için

$$N_{\epsilon, \delta} \leq \max\left\{\frac{4}{\epsilon} \log_2\left(\frac{2}{\delta}\right), \frac{8d}{\epsilon} \log_2\left(\frac{13}{\epsilon}\right)\right\}.$$

Bu teoremin bize verdiği yapabileceğimiz hatanın ölçüsü bize verildiğinde aday öğrenme kavramlarımızın ne kadar büyük örnek kümelerinde kontrol edilmesi gerektiği konusunda bir üst sınır vermesi. Bu üst sınır VC-boyutu cinsinden. Sorun VC-boyutunu hesaplamamanın gerçek hayat örneklerinde zor olması.